ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

IL PIANO CARTESIANO E LA RETTA

Monica Bagagli

PRECORSO DI MATEMATICA GENERALE CLET E CLEI

Premesse

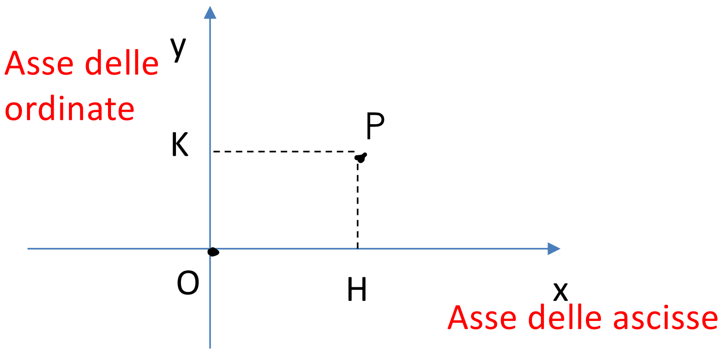
Fissando su una retta un punto O, un verso positivo e un'unità di misura, si dice fissato un sistema di ascisse.

Ascissa del punto P: numero reale relativo x che rappresenta la misura algebrica, rispetto all'unità di misura fissata, del segmento orientato OP.

Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e l'insieme dei numeri reali:

ad ogni punto della retta corrisponde uno e un solo numero reale e viceversa.

COORDINATE CARTESIANE NEL PIANO

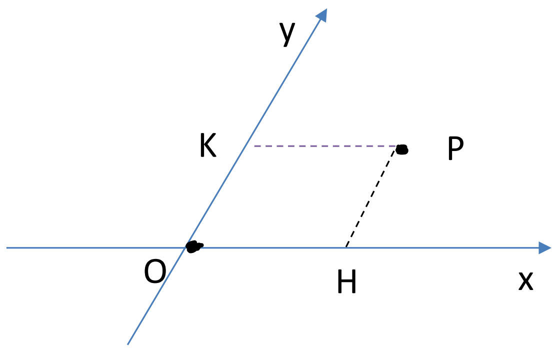


$\overline{OH}$ = x   Ascissa del punto P

$\overline{OK}$ = y   Ordinata del punto P

P(x,y)

n.b. Si possono considerare anche sistemi di riferimento cartesiani non ortogonali



$\overline{OH}$ = x Ascissa del punto P

$\overline{OK}$ = y Ordinata del punto P

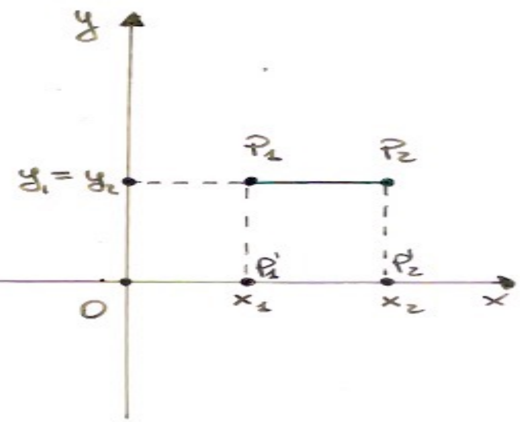
Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali:

Ad ogni punto del piano corrisponde una e una sola coppia di numeri reali e viceversa.

DISTANZA TRA DUE PUNTI

$P_1(x_1\,,\,y_1)$ $P_2(x_2\,,\,y_2)$

1) $y_1 = y_2$

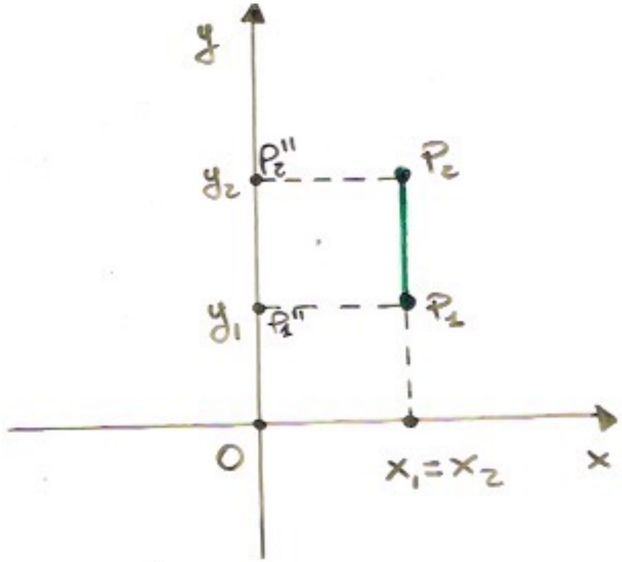


$$\boxed{\overline{P_1P_2} = |x_2 - x_1|}$$

n.b. **Il valore assoluto di un numero reale α è:**

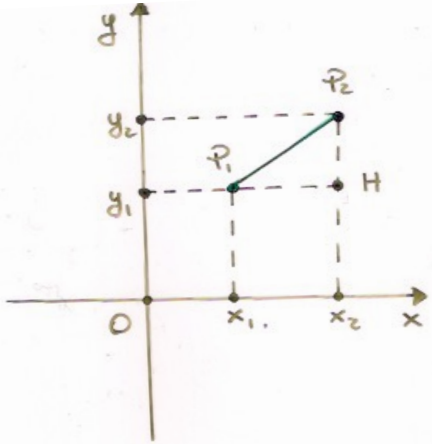
$$|\boldsymbol{\alpha}| = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} & se \quad \boldsymbol{\alpha} \geq 0 \\ -\boldsymbol{\alpha} & se \quad \boldsymbol{\alpha} < 0 \end{cases}$$

2) $x_1 = x_2$



$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \left| y_2 - y_1 \right|}$$

3) Caso generale



$\overline{P_1H} = |x_2 - x_1|$, $\overline{P_2H} = |y_2 - y_1|$

Applicando il T. di Pitagora si ottiene:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

da cui, estraendo le radici quadrate,

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

ESEMPI

Calcolare le distanze tra le seguenti coppie di punti:

A(2, 3)   B(- 5, 3)

C(1+$\sqrt{2}$, - 8)   D(1+$\sqrt{2}$, - 11)

E(2, - 5)   F(1,2)

$\overline{AB}$ =$|-5-2|$= $|-7|$= 7

$\overline{CD}$ =$|-11-(-8)|$= $|-3|$= 3

$\overline{EF}$ =$\sqrt{(1-2)^2+(2+5)^2}$= $\sqrt{(-1)^2+(7)^2}$= $\sqrt{1+49}$= $\sqrt{50}$= 5$\sqrt{2}$

EQUAZIONE DI UN LUOGO GEOMETRICO NEL PIANO CARTESIANO

LUOGO GEOMETRICO PIANO:

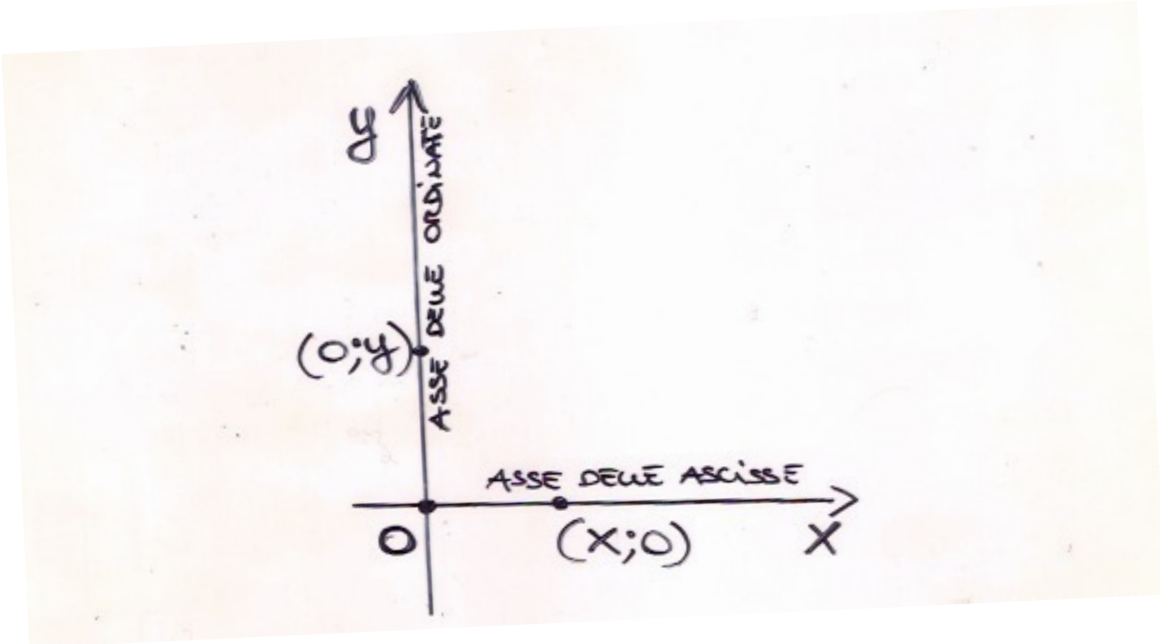
L'insieme di tutti e soli i punti del piano che soddisfano una determinata condizione.

La proprietà caratteristica del luogo può essere tradotta in un'equazione del tipo:

$$F(x\ ,\ y)=0$$

LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

Assi cartesiani:

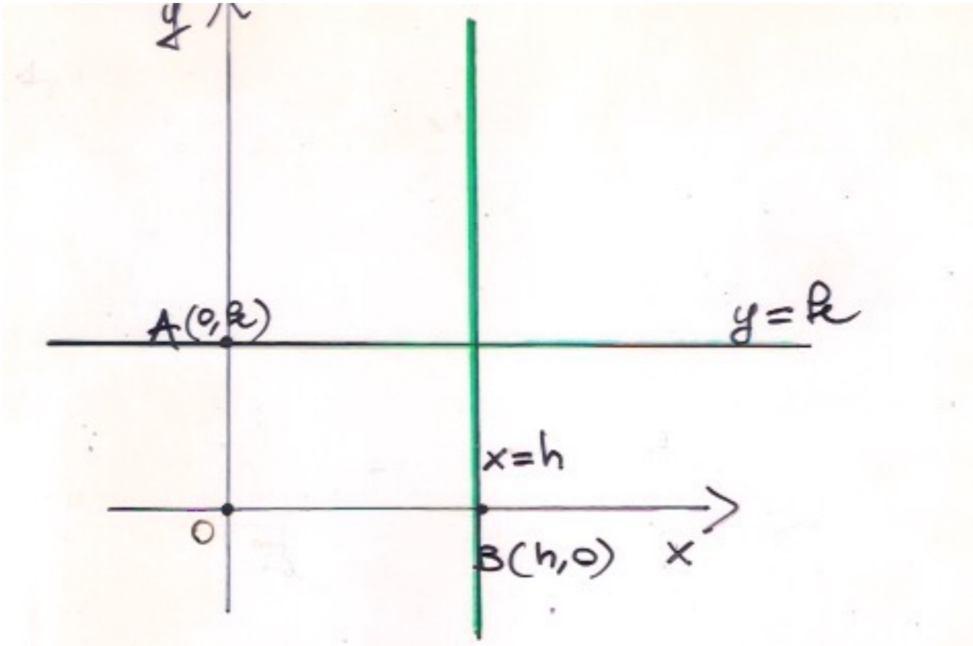


L'asse delle x è rappresentato dall'equazione y=0 che è verificata da tutti e soli i punti P(x , 0)
L'asse delle y è rappresentato dall'equazione x=0 che è verificata da tutti e soli i punti Q(0 , y).

ASSE X → y=0

ASSE Y → x=0

RETTE PARALLELE AGLI ASSI

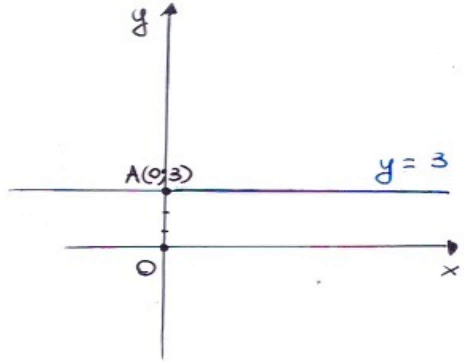


Retta parallela all'asse x ⟶ y=k

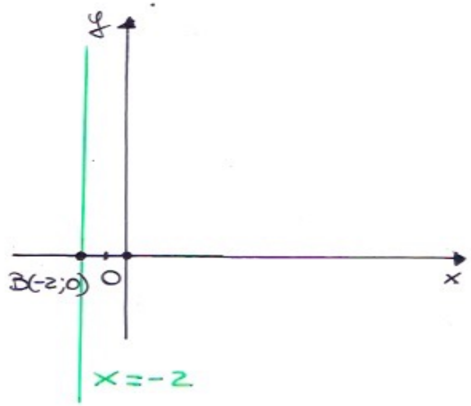
Retta parallela all'asse y ⟶ x=h

Se k=0 e h=0 si ottengono, rispettivamente, l'equazione dell'asse x e quella dell'asse y

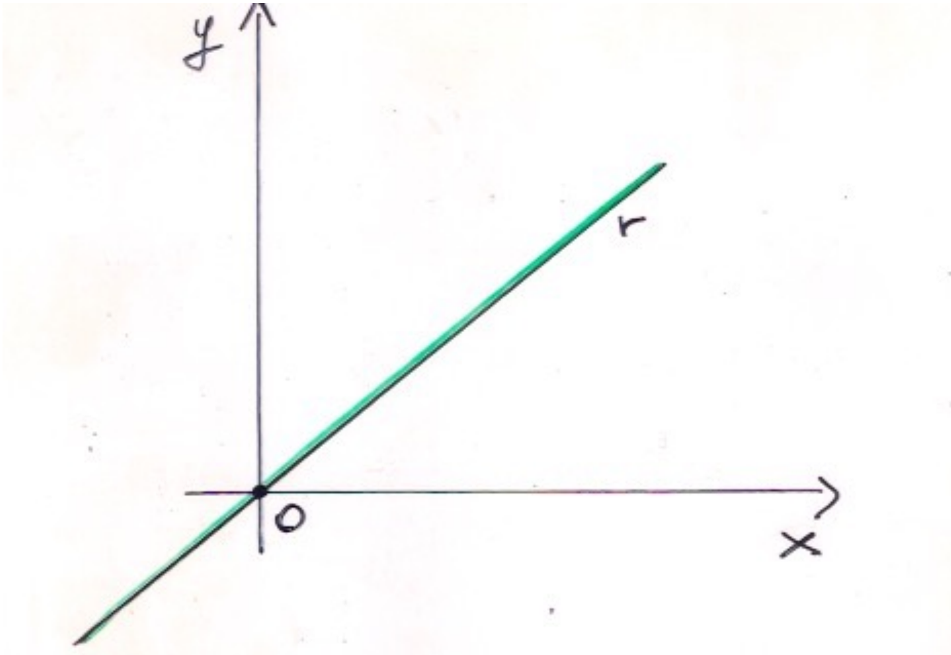
$y = 3$



$x = -2$



RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE

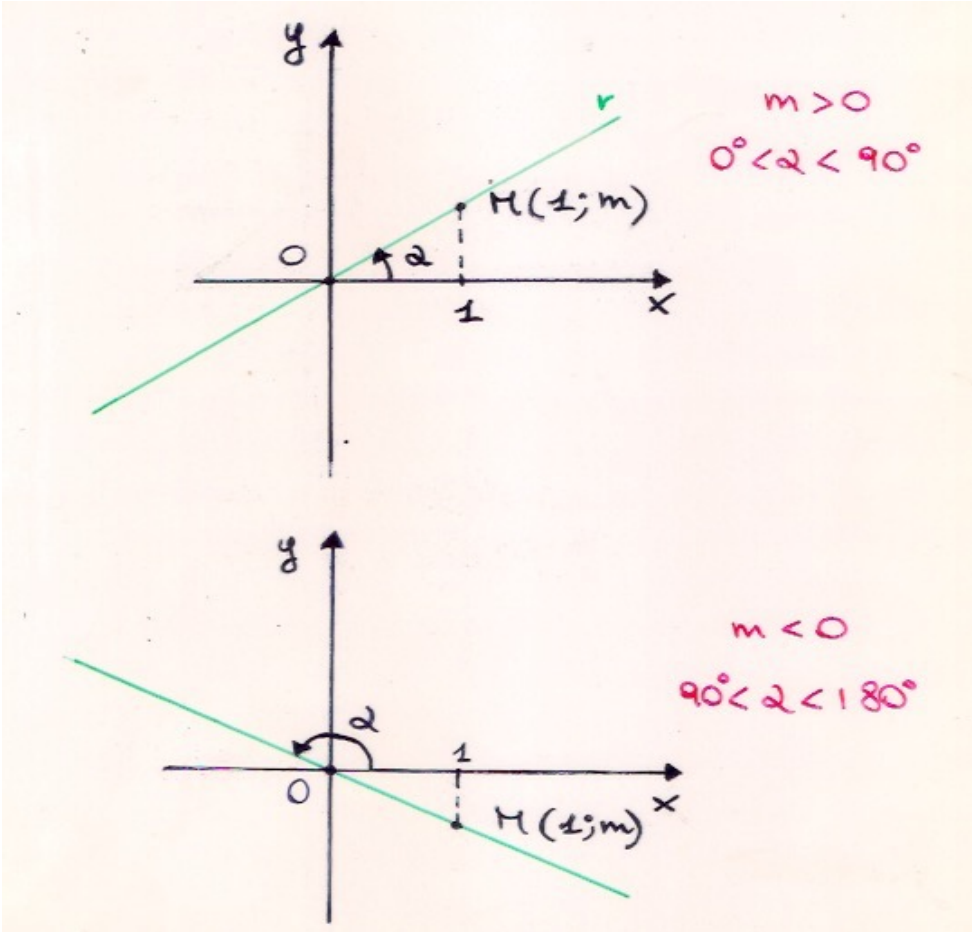


La retta r è il luogo dei punti aventi ordinata proporzionale all'ascissa secondo un coefficiente opportuno.

Equazione: $\boxed{y=mx}$

m= coefficiente angolare

Più precisamente, poiché per x=1 si ottiene y=m, l'equazione y=mx rappresenta una retta passante per l'origine e per il punto M(1, m)



OSSERVAZIONI:

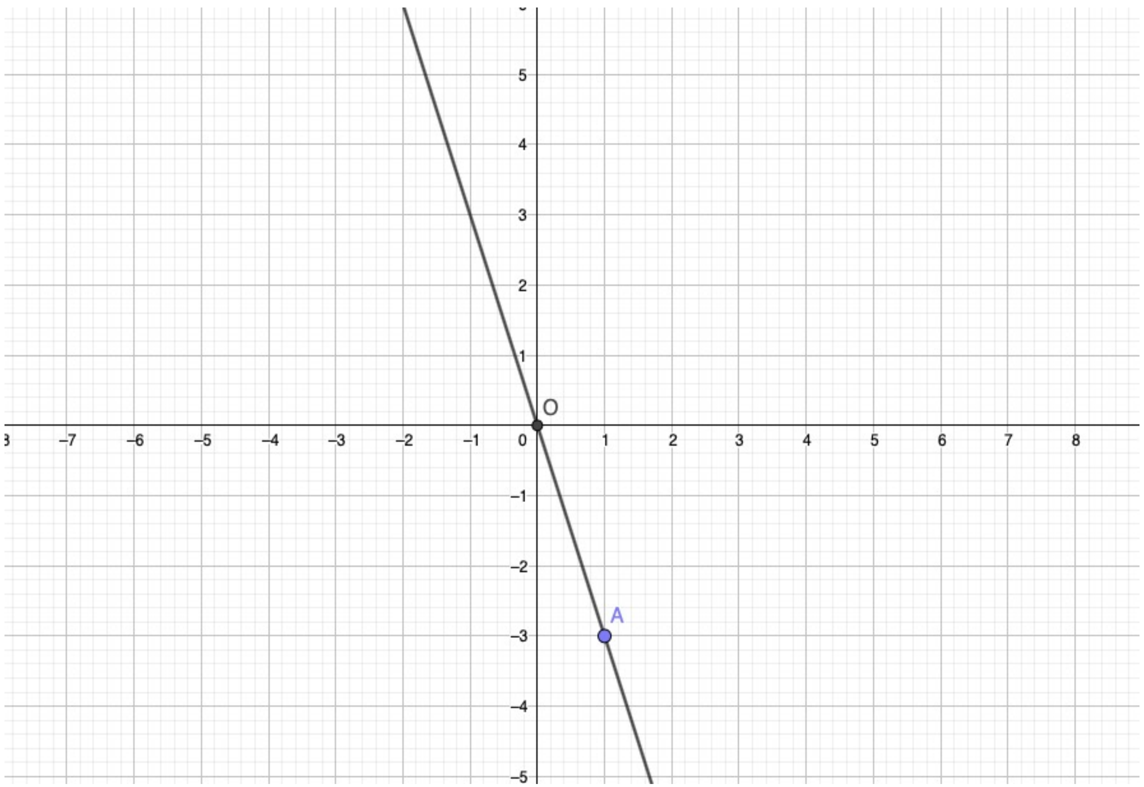
1) L'equazione y=mx per m=0 diventa y=0 (asse x)

2) L'equazione y=mx NON può rappresentare l'asse y.

Infatti $m=\frac{y}{x}$ non ha senso per x=0, che è l'ascissa di tutti i punti dell'asse y.

Dunque, l'asse y non ha coefficiente angolare.

Esercizio: tracciare il grafico della retta di equazione $y=-3x$



x	y
0	0
1	−3

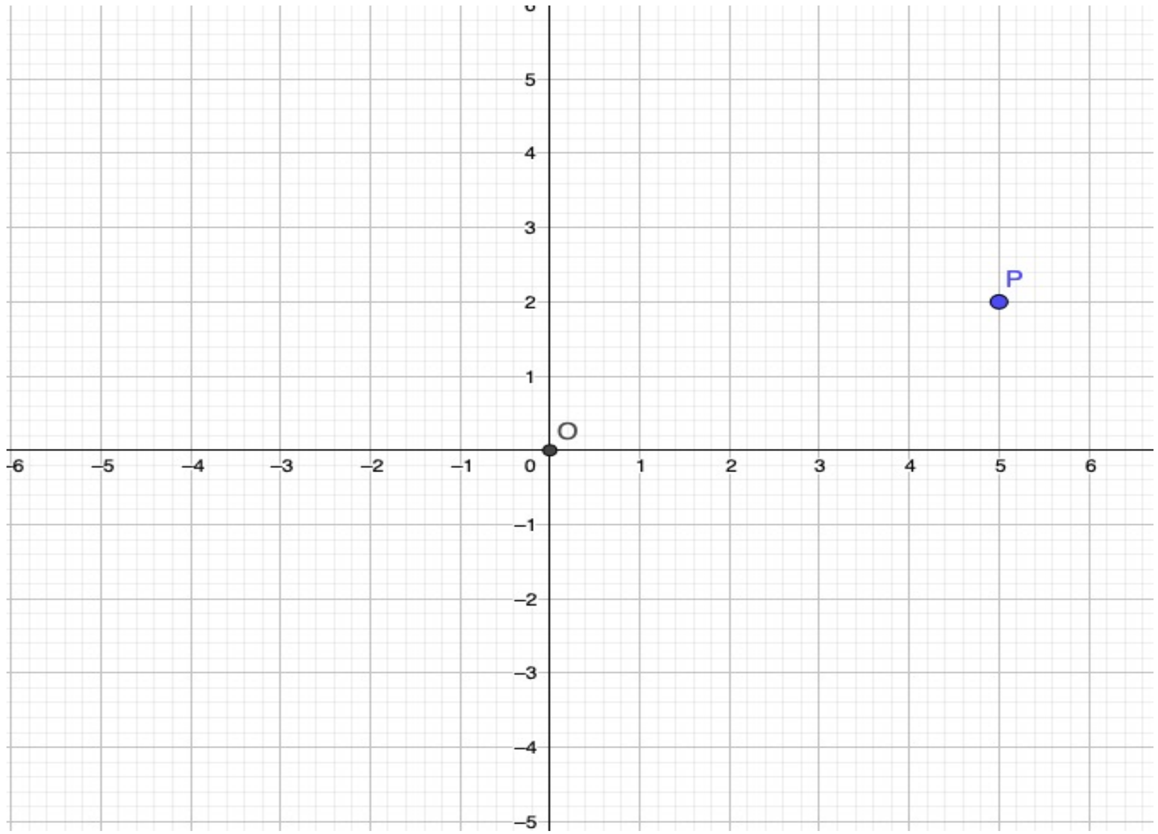
Esercizio: **<u>scrivere</u> l'equazione della retta r passante per O(0, 0) e per P(5 , 2)**

$y=mx$

$\Longrightarrow 2=m5$

$m=\frac{2}{5}$

Equazione della retta r: $y=\frac{2}{5}x$



Verificare se i punti R(15, 6) e Q(20, 7) appartengono alla retta r di equazione $y=\frac{2}{5}x$

R(15, 6) ➡ $6=\frac{2}{5}\bullet 15$ ➡ 6=6 quindi $R\in r$

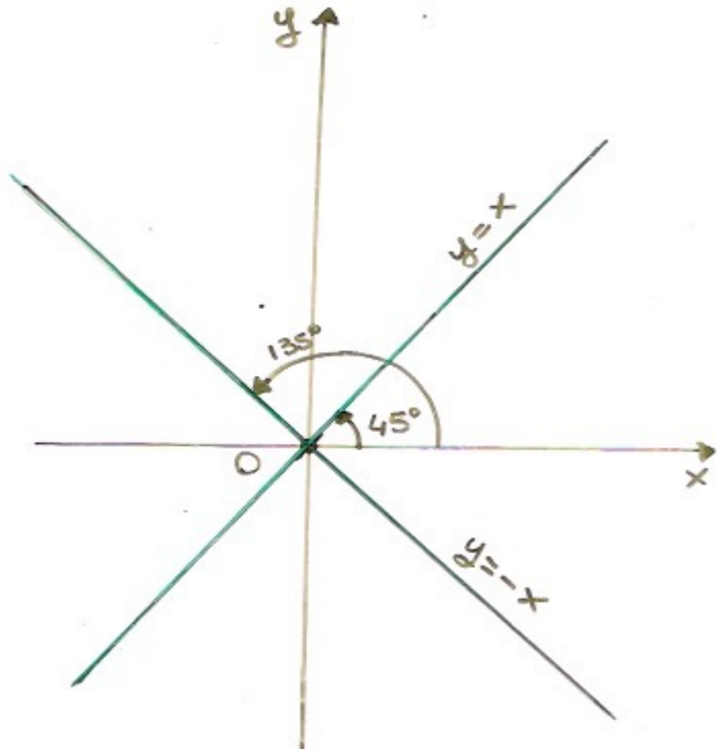
Q(20, 7) ➡ $7=\frac{2}{5}\bullet 20$ ➡ 7=8 quindi $Q\notin r$

BISETTRICI DEI QUADRANTI

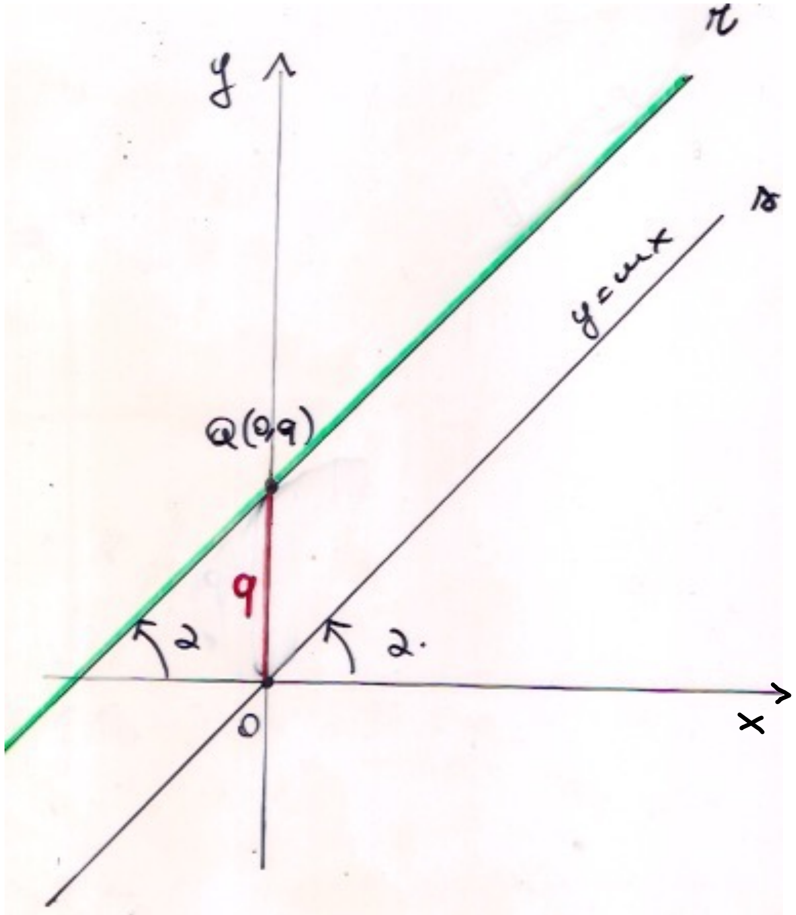
$y=mx$ per $m=\pm 1$

$y=x$ bisettrice del primo - terzo quadrante ($m=1$, $\alpha=45°$)

$y=-x$ bisettrice del secondo- quarto quadrante ($m=-1$, $\alpha=135°$)



EQUAZIONE DELLA RETTA NON PASSANTE PER L'ORIGINE E NON PARALLELA AGLI ASSI



Equazione della retta in forma esplicita

$$\boxed{y=mx+q}$$

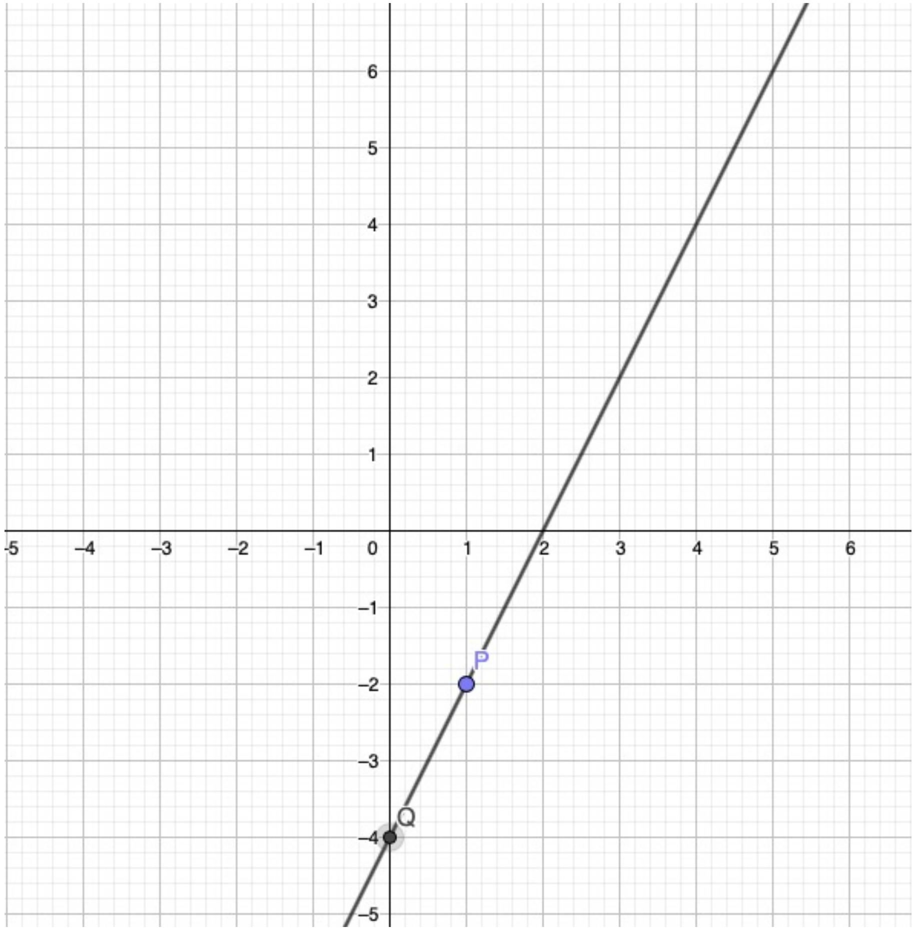
m= coefficiente angolare

q= ordinata all'origine

Se m>0 ⇒ α acuto

Se m<0 ⇒ α ottuso

Esercizio: tracciare il grafico della retta r di equazione y=2x- 4
Verificare se A(5, 6) e B(4,3) appartengono ad r.



x	y
0	−4
1	−2

A(5,6) ⇒ 6=2 · 5 -4 ⇒ 6=6 Vero, A ∈ r

B(4,3) ⇒ 3=2 · 4 -4 ⇒ 3=4 Falso, B ∉ r

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

EQUAZIONE GENERALE DELLA RETTA

$$ax + by + c = 0$$

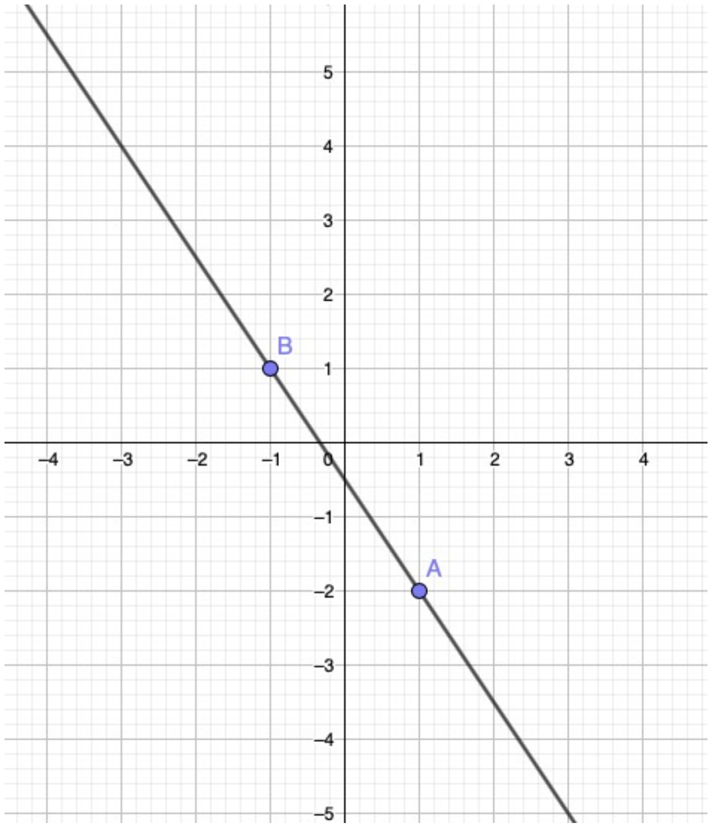
con $a, b, c \in R$

(a, b non contemporaneamente nulli)

Esercizio: Tracciare la retta di equazione 3x+2y+1=0

2y= -3x-1 $\Rightarrow$ $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

x	y
1	−2
-1	1



m= $-\frac{3}{2}$

q= $-\frac{1}{2}$

A(1, -2)

B(-1,1)

Esercizio (prova finale 1/10/2008)

$$x - 5y + 10 = 0$$

1. Determinare il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine

$$-5y = -x - 10$$

$$5y = x + 10$$

$$y = \frac{1}{5}x + 2$$

Risposta: $\begin{cases} m = \frac{1}{5} \\ q = 2 \end{cases}$

2. Stabilire se il punto $A\left(2; \frac{12}{5}\right)$ appartiene alla retta assegnata.

$$2 - 5 \cdot \left(\frac{12}{5}\right) + 10 = 0$$

$$2 - 12 + 10 = 0$$

$$0 = 0$$

Risposta: $A \in r$

ESERCIZI

1) Data le retta r di equazione x+2y-1=0:

   I. individuare m e q

   II. Stabilire quale dei seguenti punti appartiene alla retta r: A(0,1), B($-2\sqrt{2}$+1, $\sqrt{2}$), C($\frac{1}{2}$, 0)

2) Scrivere l'equazione della retta passante per O(0,0) e P(2, $\frac{4}{5}$)

3) Rappresenta nel piano la retta di equazione y=-2x+3

4) Data le retta r di equazione x+2y-4=0

   I. individuare m e q

   II. Tracciare il grafico

1)

$$x + 2y - 1 = 0$$

I. $m = ?$ $q = ?$

$$2y = -x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$m = -\frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

II. $A(0,1)$ $B(-2\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$

$C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Poiché $(-2\sqrt{2}+1) + 2\cdot(\sqrt{2}) - 1 =$

$$\cancel{-2\sqrt{2}} + \cancel{1} + \cancel{2\sqrt{2}} - \cancel{1} = 0$$

$$0 = 0$$

Ber

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

2)

Retta per $O(0,0)$ e $P(2,\frac{4}{5})$

$y = mx$

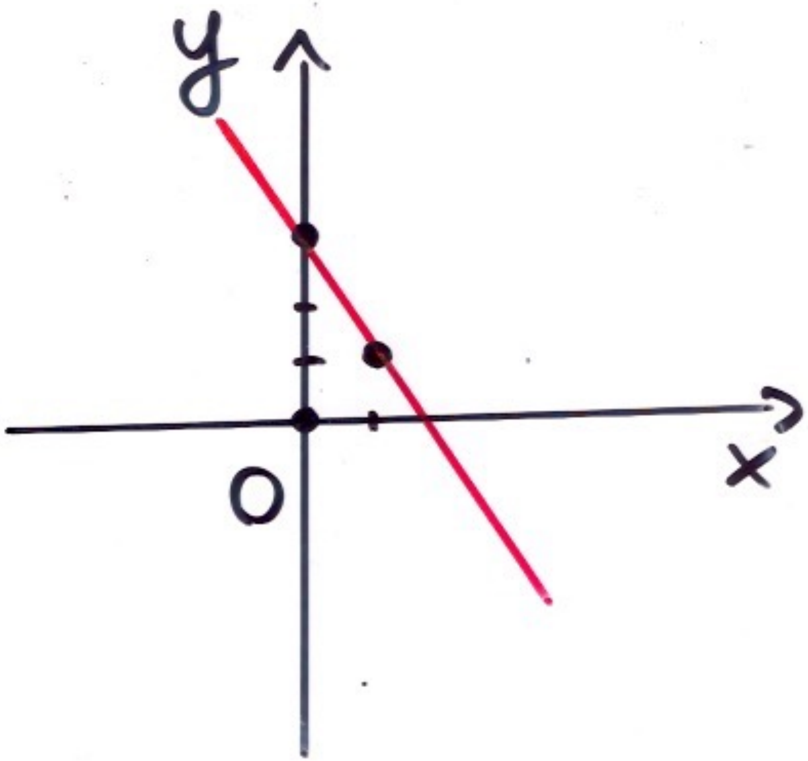
$\frac{4}{5} = m \cdot 2 \rightarrow m = \frac{2}{5}$

$y = \frac{2}{5}x$

3)

$$y = -2x + 3$$

x	y
0	3
1	1



4)

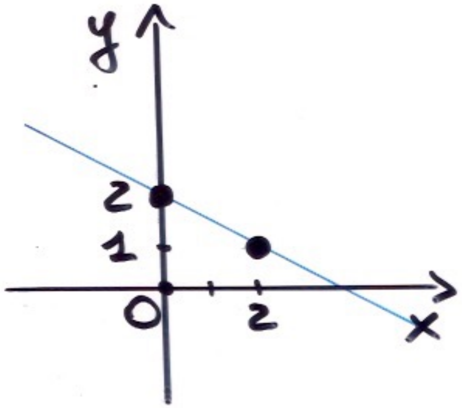
$$x + 2y - 4 = 0$$

$$2y = -x + 4$$

$$y = \frac{-x}{2} + \frac{4}{2}$$

$m = -\frac{1}{2}$

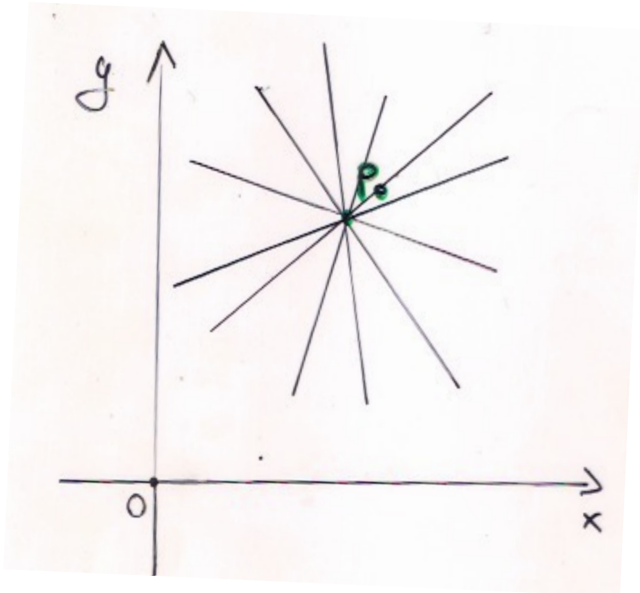
$q = 2$



x	y
0	2
2	1

RETTE PER UN PUNTO ASSEGNATO $P_0(x_0, y_0)$

$\boldsymbol{P_0(x_0, y_0)}$ punto del piano



Una retta y=mx+q passa per $\boldsymbol{P_0(x_0, y_0)}$ $\Leftrightarrow$ $y_0 = mx_0 + q$

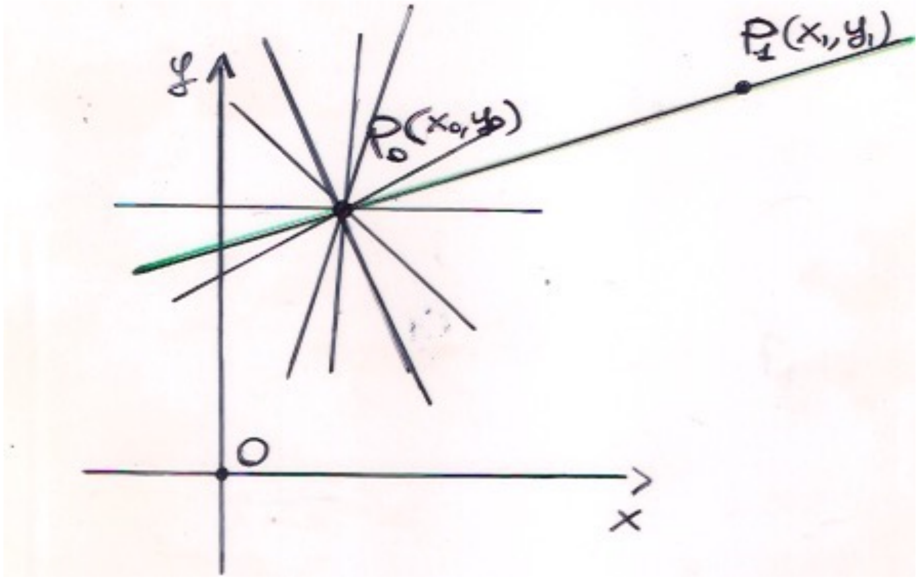
Da cui

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

L'equazione rappresenta tutte le rette per $\boldsymbol{P_0}$ <u>fuorché</u> la retta **x=** $\boldsymbol{x_0}$

RETTA PER DUE PUNTI

$P_0(x_0, y_0)$ $P_1(x_1, y_1)$ con $x_0 \neq x_1$



$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$ ⇒ m= $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Da cui

$$\boxed{y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

Equazione retta per P_0 e P_1 assegnati

N.B. **Se $x_0 = x_1$ la retta richiesta ha equazione x= x_0 (parallela all'asse y)**

Se $\boldsymbol{y_0} \neq \boldsymbol{y_1}$

Dividendo entrambi i membri per $y_1 - y_0$ si ha:

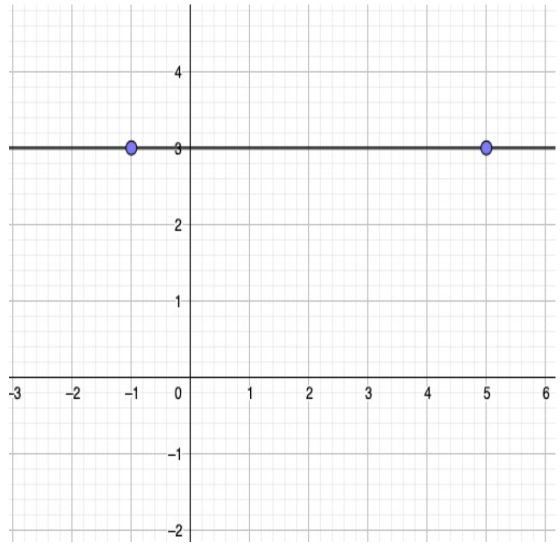
$$\boxed{\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

Equazione retta per due punti assegnati $\boldsymbol{P_0}$ e $\boldsymbol{P_1}$

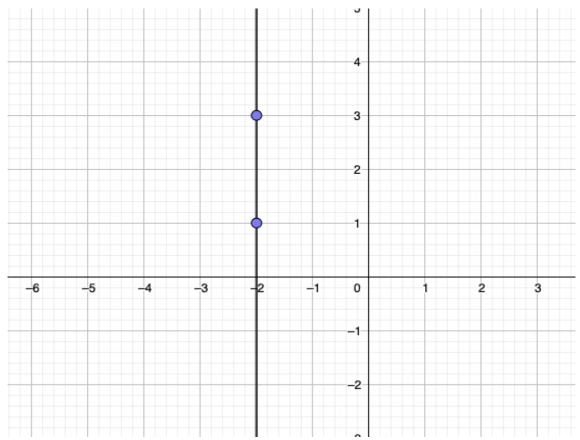
N.B. Se $y_0 = y_1$ la retta richiesta ha equazione y= y_0 (parallela all'asse x)

ESEMPI

La retta passante per $\boldsymbol{P_1}$(-1, 3) e $\boldsymbol{P_0}$(5, 3) ha equazione: **y=3**



La retta passante per $\boldsymbol{P_1}$(-2, 3) e $\boldsymbol{P_0}$(-2, 1) ha equazione: **x=-2**



ESEMPIO: **scrivere l'equazione della retta passante per $P_0(2, -3)$ e $P_1(-1, 4)$**

$$\frac{y-(-3)}{4-(-3)} = \frac{x-2}{-1-2}$$

$$\frac{y+3}{7} = \frac{x-2}{-3}$$

$$\frac{y+3}{7} = \frac{-x+2}{3}$$

$$\frac{3(y+3)}{21} = \frac{7(-x+2)}{21}$$

3y+9=-7x+14

7x+3y-5=0

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

ESEMPIO: **scrivere l'equazione della retta passante per $P_0(2, 3)$ e $P_1(5, -1)$**

$$y-3=\frac{-1-3}{5-2}(x-2)$$

$$y-3=\frac{-4}{3}(x-2)$$

$$3(y-3)=-4(x-2)$$

$$4x+3y-17=0$$

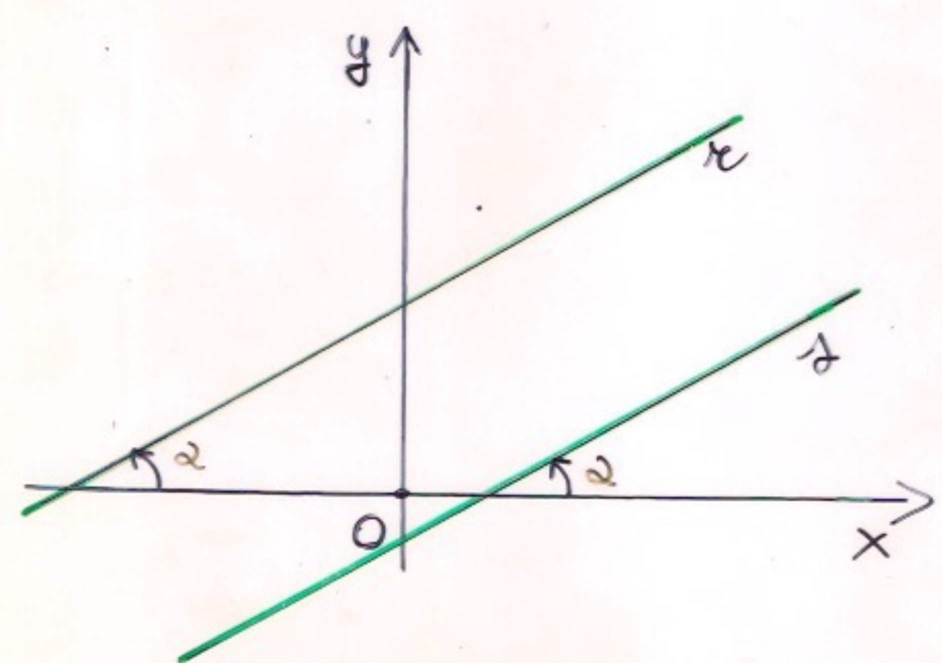
RETTE PARALLELE

Siano r ed s due rette non perpendicolari all'asse x

r) y=mx+q

s) y=m'x+q'

r//s $\Leftrightarrow$ m=m'



N.B. Per le rette parallele all'asse y non è definito Il coefficiente angolare: la loro equazione è del tipo x=h

Esempio: Stabilire se le rette

$r: 2x+4y-3=0$ e $s: y=-\frac{1}{2}x-7$

sono parallele

$r: \quad 4y=-2x+3 \Rightarrow y=-\frac{2}{4}x+\frac{3}{4}$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

$s: \quad y=-\frac{1}{2}x-7$

$m_1 = m_2 \Rightarrow r // s$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

RETTE PERPENDICOLARI

Siano r ed s due rette non parallele agli assi:

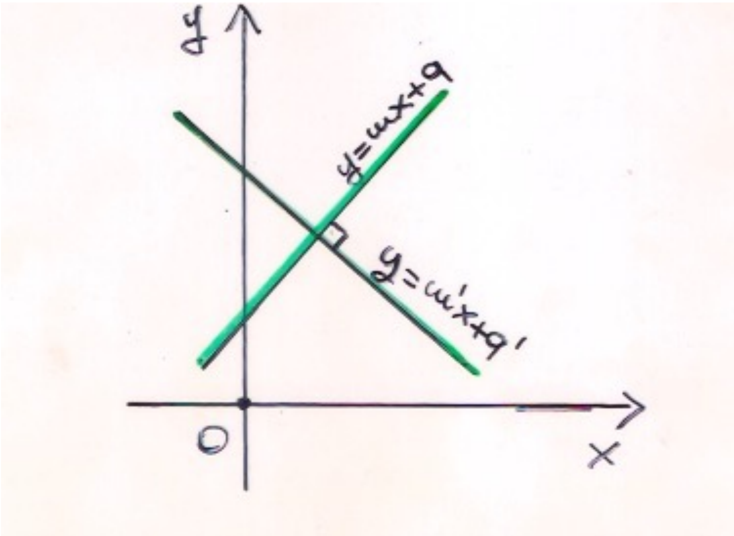
r) y=mx+q

s) $y=m'x+q'$

$r \perp s \Longleftrightarrow m \bullet m' = -1$ o anche $m = -\frac{1}{m'}$

N.B. Se una delle due rette è parallela all'asse x , l'altra è parallela all'assey; La prima ha m=0, ma per la seconda il coefficiente angolare non è definito

(m=∞)



Esempio: Stabilire se le rette

$r: \quad y = 2x+1$

$s: \quad 2x+4y-5=0$

sono perpendicolari.

$r: m_r = 2$

$s: \quad 4y = -2x+5 \Rightarrow y = -\frac{2}{4}x + \frac{5}{4}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

$m_s = -\frac{1}{2}$

Poiché $\quad m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$

ESERCIZI

1) Determinare l'equazione della retta passante per P$\left(1;\frac{3}{2}\right)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x-y=2$

2) Data la retta r di equazione $y=\frac{1}{3}x+2$ e il punto P(−3;4):
Determinare l'equazione della retta passante per P e *parallela* alla retta r;
determinare l'equazione della retta passante per P e *perpendicolare* alla retta r .

3) Determinare l'equazione della retta passante per P(1; – 5) e parallela alla retta r di equazione $x+y=2$

4) Date le rette di equazione:
a) 2x+3y−2=0 b) 3x−y+6=0 c) −6x+2y=0 d) 3x−2y-8=0
Stabilire quali sono parallele e quali perpendicolari.

5) Scrivere l'equazione della retta passante per i punti A(−4;0) e B(1;2);
Stabilire se il punto P$\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{5}\right)$ appartiene a tale retta

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

1)

$$y - \frac{3}{2} = m(x-1)$$

$$x - y = 2$$

$$-y = -x + 2$$

$$y = x - 2 \rightarrow m_{\perp} = -1$$

$$y - \frac{3}{2} = -1(x-1)$$

$$y = -x + 1 + \frac{3}{2}$$

$$y = -x + \frac{5}{2}$$

2)

I. Determina l'equazione della retta passante per P e parallela alla retta r.

$$m_{//} = \frac{1}{3}$$

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x+3)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 5$$

$$r_{//}: \quad y = \frac{1}{3}x + 5$$

II Determina l'equazione della retta passante per P e perpendicolare alla retta r.

$$m_\perp = -3$$

$$y-4=-3(x+3)$$

$$y=-3x-5$$

$$r_\perp : \quad y=-3x-5$$

3)

Determinare l'equazione della retta passante per $P(1,-5)$ e parallela alla retta r di equazione $x+y=2$

- $y+5=m(x-1)$

- $x+y=2$

  $y=-x+2$

  $m_{//}=-1$

Quindi

$$y+5=-1(x-1)$$

$$y=-x+1-5$$

$$y=-x-4$$

Risposta : $y=-x-4$

4)

ⓐ $2x+3y-2=0$

ⓑ $3x-y+6=0$

ⓒ $-6x+2y=0$

ⓓ $y=\frac{3}{2}x-4$

Stabilire quali sono parallele e quali perpendicolari.

ⓐ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ $\quad m=-\frac{2}{3}$

ⓑ $y=3x+6$ $\quad m=3$

ⓒ $y=3x$ $\quad m=3$

ⓓ $m=\frac{3}{2}$

$a \perp d$, $b // c$

5)

$A(-4;0)$ $B(1;2)$

retta per A e B

$$\frac{y-0}{2-0}=\frac{x-(-4)}{1-(-4)}$$

$$\frac{y}{2}=\frac{x+4}{5}$$

$$y=\frac{2}{5}x+\frac{8}{5}$$

$P\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{5}\right)\in r$?

$$\frac{7}{5}=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{5}$$

$$\frac{7}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}$$

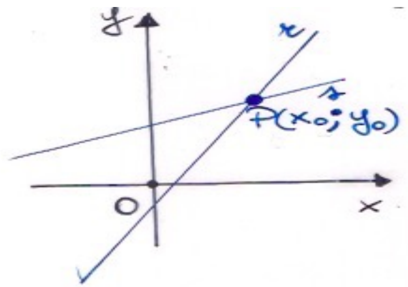
$$\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

Risposta: $P\in r$

POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

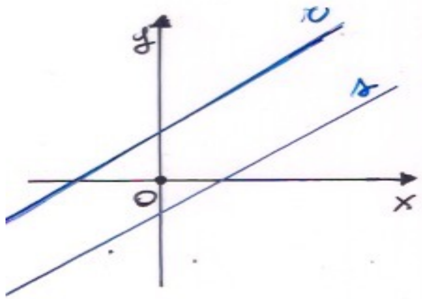
r) ax+by+c=0 s) a'x+b'y+c'=0

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$



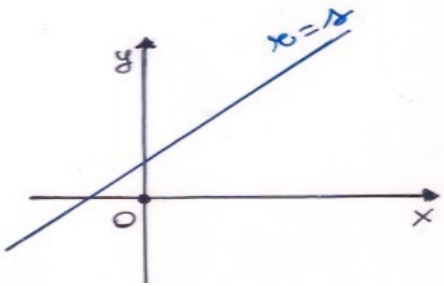
RETTE INCIDENTI

il sistema è determinato, la soluzione è $(x_0; y_0)$



RETTE PARALLELE e DISTINTE

il sistema è impossibile.



RETTE PARALLELE e COINCIDENTI

il sistema è indeterminato.

Esercizio: determinare le coordinate del punto d'intersezione tra le rette
r) 2x-5y+3=0 e s) x-2y=0

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(2y) - 5y + 3 = 0 \\ / \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y - 5y + 3 = 0 \\ / \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = -3 \\ / \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 2(3) = 6 \end{cases} \longrightarrow P(6, 3)$$

$r: \; 2x - 5y + 3 = 0$

$-5y = -2x - 3$

$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$

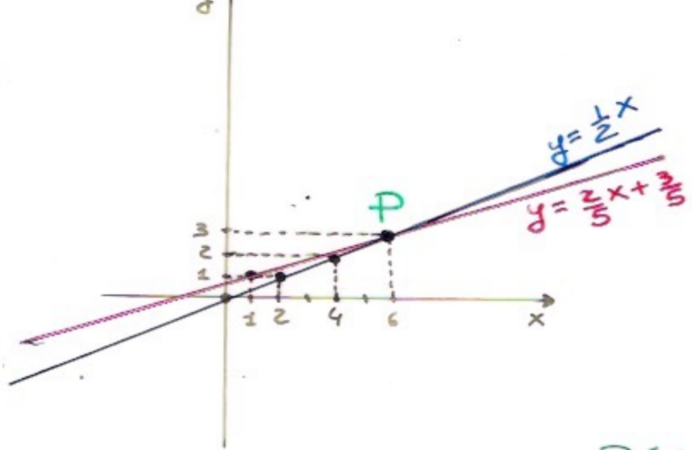
x	y
1	1
6	3

$s: \; x - 2y = 0$

$-2y = -x$

$y = \frac{1}{2}x$

x	y
2	1
4	2



$P(6; 3)$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esercizio:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3(2x + 7) = 0 \\ / \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 6x + 21 = 0 \\ / \end{cases}$$

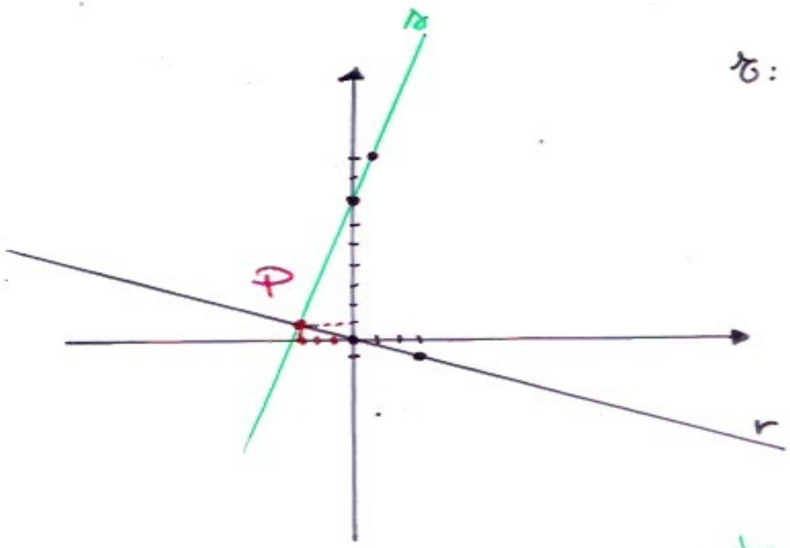
$$\begin{cases} 7x = -21 \\ / \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 2(-3) + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Il sistema è determinato

Geometricamente, la soluzione del sistema rappresenta il punto d'intersezione delle rette r) $x+3y=0$ e s) $y=2x+7$



r: $x+3y=0$

$y=-\frac{1}{3}x$

x	y
0	0
3	-1

s: $y=2x+7$

x	y
0	7
1	9

$P(-3;1)$

Osservazione:

r) $ax+by+c=0$ s) $a'x+b'y+c'=0$

r e s incidenti $\iff \dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$

r e s parallele e distinte $\iff \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$

r e s parallele e coincidenti $\iff \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

Esercizio: studiare la posizione reciproca delle seguenti coppie di rette

a) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y - 2 = 0 \\ x + \frac{3}{2}y - 1 = 0 \end{cases}$

a) Essendo $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ in quanto $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$ le rette sono incidenti e il sistema è determinato.

b) In questo caso $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ $\frac{2}{1} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{-1}$ le rette sono coincidenti e il sistema è indeterminato